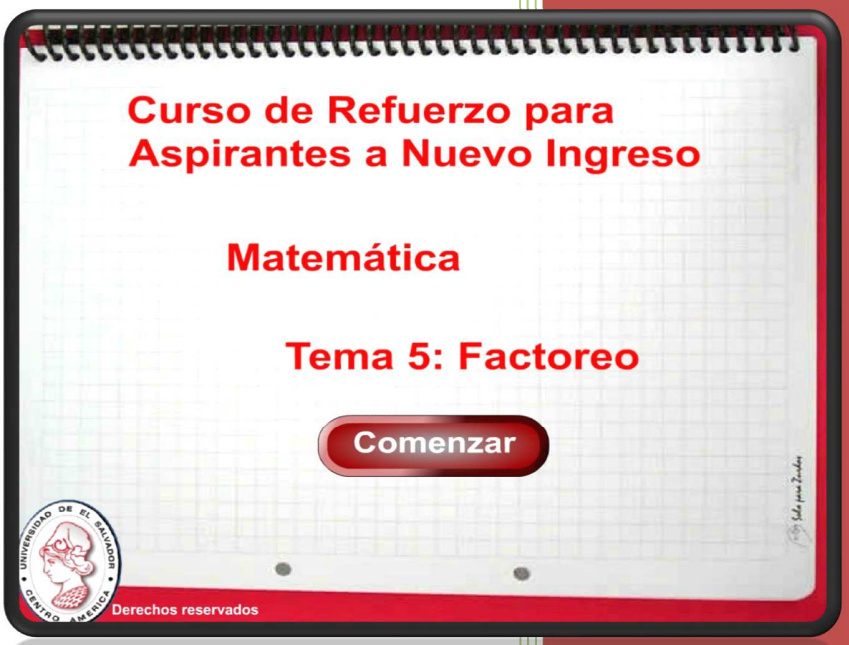
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Refuerzo para Aspirantes a Nuevo Ingreso

MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

FACTOREO 1
CASOS TÍPICOS DE FACTORIZACIÓN 1
1) FATOR COMUN. 1
2) DIFERENCIA DE CUADRADOS 2
3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO 3
4) TRINOMIOS QUE NO SON CUADRADOS PERFECTOS 4
5) DIFERENCIA DE CUBOS Y SUMA DE CUBOS 6
DIVISIÓN SINTÉTICA. 7
Teorema del Factor y del Residuo 9
TEOREMA DEL RESIDUO 9
TEOREMA DEL FACTOR 10
TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA 10
Teorema de la Raíz Racional. 11

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

FACTOREO

Los factores de una expresión algebraica son dos o más expresiones que multiplicadas entre sí originan a la primera.

Por ejemplo la expresión algebraica x^2-5x+6 puede expresarse como el producto $(x-3)(x-2)$ ya que:

$$(x-3)(x-2)=(x-3)(x)+(x-3)(-2)$$
$$=x^2-3x-2x+6$$
$$=x^2-5x+6$$

CASOS TÍPICOS DE FACTORIZACIÓN

1) FATOR COMUN.

La ley distributiva, la ley asociativa y las leyes de los exponentes se utilizan para obtener un factor común de una expresión algebraica de varios términos.

Ejemplo: Exprese en factores

a) $6x^2y-2x^2$

solución

$6x^2y-2x^2=\left(2x^2\right)(3y)-\left(2x^2\right)(1)\leftarrow$ (Ley Asociativa y ley de los Exponentes)

$=\left(2x^2\right)(3y-1)\leftarrow$ (Ley Distributiva)

b) $9x^2y^3+6xy^4$

Solución

$9x^2y^3+6xy^4=\left(3xy^3\right)(3x)+\left(3xy^3\right)(2y)$

$=3xy^3(3x+2y)$

c) $2x(y-z)-3z(y-z)$

Solución

$2x(y-z)-3z(y-z)=(y-z)(2x-3z)$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

d) $2ax-4bx+ay-2by$

Solución

$$2ax-4bx+ay-2by=(2ax+ay)+(-4bx-2by)$$
$$=a(2x+y)-2b(2x+y)$$
$$=(a-2b)(2x+y)$$

e) $2x^2-3xy-4x+6y$

Solución

$$2x^2-3xy-4x+6y=(2x^2-4x)+(-3xy+6y)$$
$$=2x(x-2)-3y(x-2)$$
$$=(2x-3y)(x-2)$$

2) DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se conoce que $(x-a)(x+a)=x^2-a^2$, por lo tanto $\boxed{x^2-a^2=(x-a)(x+a)}$

Es decir que: La diferencia de los cuadrados de dos números es igual al producto de la diferencia de los números por su suma.

Ejemplo. Exprese en factores

a) $4x^2-9y^2$

Solución

$$4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$$
$$=(2x-3y)(2x+3y)$$

b) $x^2-(3y+z)^2$

Solución

$$x^2-(3y+z)^2=[x-(3y+z)][x+(3y+z)]$$
$$=(x-3y-z)(x+3y+z)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En los productos notables vimos que:

$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$ y que $\boxed{x^2+2ax+a^2=(x+a)^2}$

$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$ por lo tanto $\boxed{x^2-2ax+a^2=(x-a)^2}$

Para expresar en factores un *Trinomio Cuadrado Perfecto* se deberá obtener la raíz cuadrada de dos de los tres términos del trinomio y verificar que el doble producto de esas raíces cuadradas es el término restante del trinomio.
El signo de binomio es el mismo que el del término restante del trinomio.

Ejemplo. Exprese en factores

a) x^2+6x+9

Solución

$x^2=(x)^2, 9=(3)^2, 2(x)(3)=6x,$ luego

$x^2+6x+9=(x+3)^2$

b) $9x^2-30x+25$

Solución

$9x^2=(3x)^2, 25=(5)^2, -2(3x)(5)=-2(15x)=-30x,$ luego

$9x^2-30x+25=(3x-5)^2$

c) $36a^2b^4+12ab^2y+y^2$

Solución

$36a^2b^4=(6ab^2)^2, y^2=(y)^2, 2(6ab^2)(y)=12ab^2y,$ luego

$36a^2b^4+12ab^2y+y^2=(6ab^2+y)^2$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

4) TRINOMIOS QUE NO SON CUADRADOS PERFECTOS

Anteriormente vimos que:

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Si $a+b=p$ y $ab=q$, tenemos

$(x+a)(x+b)=x^2+px+q$ por lo tanto

$$\boxed{x^2+px+q=(x+a)(x+b), \quad \text{donde } p=a+b, \quad q=ab}$$

Entonces: Para expresar en factores un trinomio de la forma **x^2+px+q,** se calculará dos números **(a y b)** tales que su suma sea igual al coeficiente de la **x** y su producto sea igual al término independiente.

Ejemplo. Exprese en factores

a) x^2+6x+8 Solución

8	2	$\Rightarrow$	$8=(2)(2)(2)$	$a=4$,	$b=2$
4	2		$=(4)(2)$	$\Rightarrow$ $a+b=4+2=6$	
2	2			$ab=4(2)=8$	
1					

$x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$

b) $x^2-7x+12$ Solución :

12	2	$\Rightarrow$	$12=(2)(2)(3)$	$a=-4$,	$b=-3$
6	2		$=(4)(3)$	$\Rightarrow$ $a+b=-4+(-3)=-7$	
3	3			$ab=(-4)(-3)=12$	
1					

$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

c) $x^2-7xy+12y^2$ Solución:

12	2	$\Rightarrow$	$12=(2)(3)(2)$	$a=-4y \quad , \quad b=-3y$	
6	3		$=(4)(3)$	$\Rightarrow$	$a+b=-4y+(-3y)=-7y$
2	2				$ab=(-4y)(-3y)=12y^2$
1					

$x^2-(7y)x+12y^2=(x-4y)(x-3y)$

d) $3x^2+10x+3$

Solución

Como el coeficiente de x^2 debe ser 1, tendremos que multiplicar por $\left(\frac{3}{3}\right)$, así:

$$\frac{3}{3}\left(3x^2+10x+3\right)=\frac{1}{3}\left((3x)^2+10(3x)+9\right), \quad \text{Sí} \quad 3x=y$$

$$=\frac{1}{3}\left(y^2+10y+9\right), \quad \text{Pero} \quad \boxed{\begin{array}{c} 9=3(3) \\ =9(1) \\ a=9 \quad , \quad b=1 \end{array}}$$

$$=\frac{1}{3}(y+9)(y+1), \quad \text{Volviendo a la variable } x$$

$$=\frac{1}{3}(3x+9)(3x+1)$$

$$=\frac{3}{3}(x+3)(3x+1)$$

$$3x^2+10x+3=(x+3)(3x+1)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

e) $8x^2+2x-15$

Solución

$$8x^2+2x-15=\frac{8}{8}\left(8x^2+2x-15\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left((8x)^2+2(8x)-120\right),\quad \text{Sí}\quad 8x=y$$

$$=\frac{1}{8}\left(y^2+2y-120\right),\quad \text{Pero}\quad \boxed{\begin{array}{l}120=(12)(10)\\ a=12\quad,\quad b=-10\\ a+b=12+(-10)=2\\ ab=12(-10)=-120\end{array}}$$

$$=\frac{1}{8}(y+12)(y-10),\quad \text{Volviendo a la variable } x$$

$$=\frac{1}{8}(8x+12)(8x-10)$$

$$=\frac{1}{8}(4)(2x+3)(2)(4x-5)$$

$$8x^2+2x-15=(2x+3)(4x-5)$$

5) DIFERENCIA DE CUBOS Y SUMA DE CUBOS

De acuerdo a los cocientes notables se tiene

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2 \qquad \text{Por lo tanto,} \qquad \boxed{x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}$$

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2 \qquad \boxed{x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}$$

Es decir: la diferencia de los cubos de dos números, es igual a la diferencia de los números multiplicada por la suma formada por el cuadrado del número más el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

Ejemplo. Exprese en factores

a) $27x^3+1$

Solución

$$27x^3+1=(3x)^3+(1)^3$$
$$=(3x+1)+\left((3x)^2-(3x)(1)+(1)^2\right)$$
$$=(3x+1)\left(9x^2-3x+1\right)$$

b) $8x^3y3-27z^6$

Solución

$$8x^3y^3-27z^6=(2xy)^3-\left(3z^2\right)^3$$
$$=\left(2xy-3z^2\right)\left((2xy)^2+(2xy)\left(3z^2\right)+\left(3z^2\right)^2\right)$$
$$=\left(2xy-3z^2\right)\left(4x^2y^2+6xyz^2+9z^4\right)$$

DIVISIÓN SINTÉTICA.

Un polinomio como x^3-4x^2+x+6 puede simbolizarse como $P(x)$, esto es:

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6$$

Recordaremos el método para dividir un polinomio, $P(x)$, entre otro de la forma $x\pm a$, por medio del siguiente

Dividir $P(x)=4x^4-2x^3-4x^2-x-3$ entre $x-1$ solución:

$4x^4-2x^3-4x^2-x-3$ $\quad$ $\underline{|x-1}$

$-4x+4x^3$ $\quad$ $4x^3+2x^2-2x-3$

$2x^3-4x^2-x-3$

$-2x^3+2x^2$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

$$\begin{array}{r} \\ -2x^2-x-3 \\ 2x^2-2x \\ \hline \\ -3x-3 \\ 3x-3 \\ \hline \\ -6 \end{array}$$

$$\frac{4x^4-2x^3-4x^2-x-3}{x-1}=4x^3+2x^2-2x-3+\frac{-6}{x-1}$$

El proceso anterior puede llevarse a cabo en forma abreviada, lo cual se conoce como división sintética, así:

1) Se escriben en forma descendente las potencias del dividendo (opcional).
2) Debajo de cada potencia se escribe su coeficiente.
3) Si el divisor es $x-a$, solo se escribe a, y si es $x+a$, se escribe $-a$
4) Debajo de la fila de los coeficientes del dividendo se deja una fila vacía.
5) Se traza una línea horizontal para separar la fila vacía de una tercera fila.
6) Se baja a la tercera fila el primer coeficiente del dividendo (este es el primer coeficiente del cociente) y se multiplica por el divisor (a ó $-a$) y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente del dividendo.
7) Se suma el segundo coeficiente del dividendo con el resultado obtenido en el paso anterior, el cual es el segundo coeficiente del cociente.
8) El proceso continua hasta obtener todos los coeficientes del cociente, el cual será de grado una unidad menor que el grado del dividendo.
9) El último coeficiente de la tercera fila es el residuo.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

x^4	x^3	x^2	x	A_0	
4	-2	-4	-1	-3	$\lfloor 1$
	4	2	-2	-3	

4	2	-2	-3	-6

Coeficientes del cociente / Residuo

$$\frac{4x^4-2x^3-4x^2-x-3}{x-1}=4x^3+2x^2-2x-3+\frac{-6}{x-1}$$

Teorema del Factor y del Residuo

$P(x)$: Dividendo
$x-a$: Divisor
R : Residuo
$C(x)$: Cociente

$P(x)$	$\lfloor x-a$
R	$C(x)$

$$\frac{P(x)}{x-a}=C(x)+\frac{R}{x-a} \longrightarrow$$

$$P(x)=(x-a)\left[C(x)+\frac{R}{x-a}\right]$$

$$P(x)=(x-a)C(x)+R$$

TEOREMA DEL RESIDUO

$$Si\ x=a \Rightarrow P(a)=(a-a)C(a)+R \Rightarrow P(a)=R$$

"Si un polinomio, $P(x)$, se divide entre $(x-a)$, el residuo, R, es igual a $P(a)$"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

Por ejemplo si el polinomio

$P(x)=4x^4-2x^3-4x^2-x-3$ se divide entre

$(x-1)$, el residuo es $P(1)$ o sea

$P(1)=4(1)^4-2(1)^3-4(1)^2-(1)-3$

$P(1)=4-2-4-1-3$

$P(1)=-6 \quad \Rightarrow \quad R=P(1)=-6$

TEOREMA DEL FACTOR

Si $R=0 \Rightarrow P(x)=(x-a)C(x) \ \wedge \ P(a)=0$

"Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $x-a$ si y solo si $P(a)=R=0$"

Al numero $x=a$ se le llama raiz de $P(x)=0$ ó un cero

del polinomio.

Por ejemplo, el polinomio $P(x)=4x^4-2x^3-4x^2-x-3$

tiene como factor a $(x+1)$ ya que

$P(-1)=4(-1)^4-2(-1)^3-4(-1)^2-(-1)-3$

$P(-1)=4+2-4+1-3$

$P(-1)=0$

Es decir si $x=-1$ es una raiz, entonces el residuo es cero

y $x-(-1)$ es un factor del polinomio.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

"Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1,$ entonces la ecuacion polinómica $P(x)=0$

tiene precisamente n raices, siempre y cuando una raiz de multiplicidad k se cuente k veces"

las raices complejas (formadas por un numero real y un numero imaginario)

se presentan en parejas, es decir, si $4+3i$ es una raiz, entonces $4-3i$ también

es raiz ($i=\sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, y $4-3i$ es el complejo conjugado de $4+3i$).

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

Por ejemplo:

a) Una ecuación polinómica de:

1) grado 3 tendrá 3 raíces

2) grado 4 tendrá 4 raíces

3) grado 7 tendra 7 raíces

b) Una ecuación polinómica, $P(x)=0,$ de grado 3 puede tener:

1) Tres raíces reales ó

2) Dos raíces complejas y una real.

c) Una ecuación polinómica, $P(x)=0,$ de grado 4 puede tener:

1) cuatro raíces reales ó

2) cuatro raíces complejas ó

3) dos raíces complejas y dos raíces reales

Teorema de la Raíz Racional.

"Si los coeficientes de la ecuación polinómica $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0,$ $a_n\neq 0,$ son todos enteros, y si P/g es una raiz (reducida a su más simple expresión), entonces P es un factor de a_0 y g es un factor de a_n"

Ejemplo. Exprese en factores

$P(x)=4x^3-16x^2+11x+10$

Solución

Recordemos que si $P(x)$ se divide entre $(x-a)$ y el residuo resulta cero, entonces $(x-a)$ y el residuo resulta cero, entonces $x=a$ es una raiz de $P(x)=0$ y $(x-a)$ es un factor de $P(x)$. En el caso presente como el polinomio es de grado 3, tendra tres raíces (tres factores).

$P(x)=4x^3-16x^2+11x+10$

$a_0=10\rightarrow P:\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 10$

$a_3=4\rightarrow g:\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

Posibles raíces $P/g:\pm 1,\ \pm 1/2,\ \pm 1/4,\ \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 5/2,\ \pm 5/4,\ \pm 10$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

veamos si $x=1$ es raiz

x^3	x^2	x	a_0	
4	-16	11	10	$\lfloor 1$
	4	-12	-1	
4	-12	-1	$\boxed{9}$	

$\Leftarrow$ como el residuo no es cero, entonces $x=1$ no es raiz

Probemos $x=-\frac{1}{2}$

x^3	x^2	x	a_0	
4	-16	11	10	$\lfloor -\frac{1}{2}$
	-2	9	-10	
4	-18	20	$\boxed{0}$	

$\Leftarrow$ como el residuo es cero, entonces $x=-\frac{1}{2}$ es una raiz

$$P(x)=(x-a)C(x)$$
$$4x^3-16x^2+11x+10=(x-(-\tfrac{1}{2}))(4x^2-18x+20)$$
$$4x^3-16x^2+11x+10=(x+\tfrac{1}{2})((2x)^2-9(2x)+20)$$
$$4x^3-16x^2+11x+10=(x+\tfrac{1}{2})(2x-4)(2x-5)$$
$$4x^3-16x^2+11x+10=(2x+1)(x-2)(2x-5)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados